SYNTHESE LOGIQUE COMBINATOIRE
-FIPMECA 1-

Table des matières

I. Introduction....4
I.1. L'histoire de la logique combinatoire....4
I.1.1. Ère des mécaniciens....4
I.1.2. Ère des électriciens....4
I.2. Rôle de l'automatique....4
I.3. Le précurseur de l'automatique. 4
I.4. La variable booléenne ou logique....5
I.5. Qu'est ce qu'une fonction logique ? 5
I.6. Combien de fonctions logiques peut-on réaliser avec n variables d'entrées ?....5
I.7. Définition de la logique combinatoire....6
I.8. Les propriétés de l'algèbre de Boole utilisées en logique combinatoire....6
I.9. Définition du théorème de De Morgan....6
II. Les principaux modes de représentation de la logique combinatoire....7
II.1. La forme canonique d'une équation logique:....7
II.2. Le logigramme d'une équation logique:....7
II.3. Le schéma électrique, le graphe à contact (ladder) d'une équation logique:....8
II.4. Le chronogramme:....8
II.5. La table de vérité:....9
III. Les fonctions logiques de base....10
IV. Les fonctions logiques universelles....11
IV.1. Fonction NAND....11
IV.2. Fonction NOR 12
IV.3. Exemples de fonctions de bases obtenues à l'aide de portes universelles:....13
IV.4. Exemples d'une fonction (Y = d + (b + a) c) obtenue à partir de portes universelles. 14
NOR....14
NAND....14
V. Les fonctions logiques complexes 15
V.1. XOR....15
V.2. XNOR....15
V.3. Implication....15
V.4. Inhibition....15
VI. Les tableaux de Karnaugh....16
VI.1. Représentation d'un tableau de Karnaugh....16
VI.2. Mode d'emploi d'un tableau de Karnaugh....17
VI.3. Simplification à l'aide d'un tableau de Karnaugh....18
VI.4. Exemples d'utilisation des tableaux de Karnaugh....19

I. Introduction

I.1. L'histoire de la logique combinatoire.

I.1.1. Ère des mécaniciens

Les débuts de l'automatique sont associés à l'apparition des premiers régulateurs de niveaux. La technique a ici encore une fois précédé la théorie. À titre d'exemples, nous pouvons citer :

- L'horloge à eau ou clepsydre de Ktesibios au IIIe siècle avant J. C
- La fontaine à vin d'Héron d'Alexandrie (Ie siècle avant J. C.)
- Le système de régulation de niveau des frères Banu Musa au IXe siècle

Apparaissent ensuite les premiers régulateurs de température avec :

- Cornelius Drebbel au XVIIe siècle (utilisation du principe de dilation d'un gaz)
- Bonnemain au XVIIIe (utilisation du principe de dilation d'un métal)

Les premières réalisations de régulateurs de vitesse sont observées en 1787 dans les moulins. Le meunier anglais, Thomas Mead, combine l'idée du «serre-meule» avec l'utilisation d'un pendule centrifuge pour mesurer la vitesse de rotation. L'idée du pendule centrifuge est repris par James Watt en 1787 pour réguler la vitesse d'une machine à vapeur.

I.1.2. Ère des électriciens

Au début du XXème siècle, des problèmes d'atténuation des signaux téléphoniques (du à la longueur des lignes) vont entrainer l'étude des amplificateurs à triodes. Ces amplificateurs sont alors non-linéaires et dispersifs. Harold Black a montré que la rétroaction négative permet de réduire la non-linéarité d'un organe amplificateur en augmentant le gain de boucle de ce dispositif. Il transpose ainsi le concept de rétro-action (contre réaction) observé dans les régulateurs mécaniques dans le domaine de l'électricité. Les travaux de Black, Nyquist, Bode vont permettre l'émergence d'une approche unificatrice de l'automatique : la théorie des systèmes.

I.2. Rôle de l'automatique

L'automatique permet l'automatisation des tâches par des machines qui fonctionnent sans intervention humaine, c'est-à-dire sans opérateur.

I.3. Le précurseur de l'automatique.

George Boole (2 novembre 1815 à Lincoln Royaume-Uni - 8 décembre 1864 à Ballintemple, Irlande) est un logicien, mathématicien et philosophe britannique. Boole est l'un des précurseurs de la logique moderne. Son algèbre de la logique, l'algèbre de

Boole, qu'il exprime en 1854 dans son traité "An investigation of the laws of thought" (sur les lois de la pensée), est aussi utilisée de nos jours en électricité, en électronique et dans la mise au point des algorithmes des machines automatiques. George Boole meurt d'une pneumonie le 8 décembre 1864.

I.4. La variable booléenne ou logique

Soit l'ensemble E constitué de deux éléments :
- L'élément nul noté 0
- L'élément unité noté 1

On a donc E = {0,1}

Un élément quelconque de E est désigné par un symbole, exemple une lettre A, B,…, a, b, …où chacun peut prendre la valeur 0 ou 1. On dira que A, B, etc.,… sont des VARIABLES BINAIRES.
Il existe deux types de variables :
- Entrées (minuscules)
- Sorties (majuscules)

I.5. Qu'est ce qu'une fonction logique ?

Une fonction logique est le résultat de la combinaison (logique combinatoire) d'une ou plusieurs variables logiques reliées entre elles par des opérations mathématiques BOOLEENNES bien définies : la valeur résultante de cette fonction dépend de la valeur des variables logiques, mais de toute façon cette résultante ne peut être que **O** ou **1**

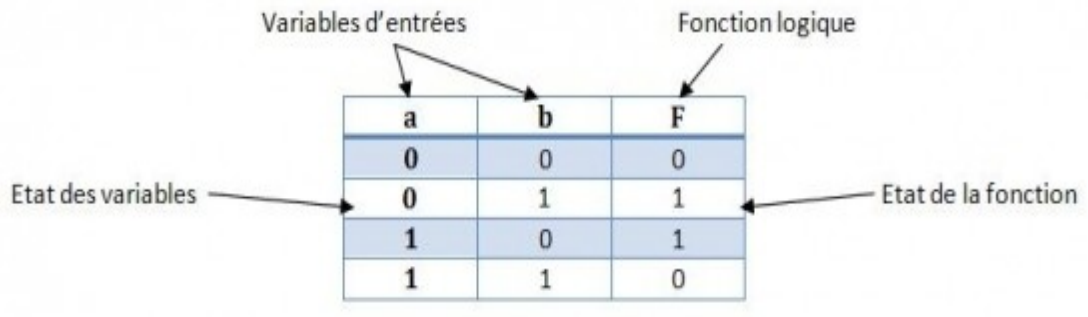
Une fonction logique possède donc une ou des **variables logiques d'entrée** et une **variable logique de sortie.**

Par convention : les variables d'entrée sont en minuscules : a,b,c…

les variables de sortie sont en majuscules : X,Y,Z…

I.6. Combien de fonctions logiques peut-on réaliser avec n variables d'entrées ?

On peut réaliser $2^{(2^n)}$ fonctions logiques.



a	b	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

I.7. Définition de la logique combinatoire

La logique combinatoire, à l'aide de fonctions logiques, permet la construction d'un système combinatoire.

Un système est dit combinatoire quand il est de type boucle ouverte, c'est à dire qu'aucune des sorties n'est bouclée en tant qu'entrée.

A chaque combinaison d'entrée correspond une seule sortie. Les systèmes combinatoires sont les plus simples et peuvent se représenter par une table de vérité indiquant pour chaque état d'entrée quel est l'état de sortie correspondant.

I.8. Les propriétés de l'algèbre de Boole utilisées en logique combinatoire

<table>
<tr><th colspan="3">Algèbre de Boole</th></tr>
<tr><td>Propriétés de la somme
0+0=0 a+0=a
0+1=1 a+1=1
1+0=1 a+$\overline{a}$=a
1+1=1 a+$\overline{a}$=1</td><td>Propriétés du produit
0.0=0 a.0=0
0.1=0 a.1=a
1.0=0 a.$\overline{a}$=a
1.1=1 a.$\overline{a}$=0</td><td>Négation
$\overline{0}$=1
$\overline{1}$=0
$\overline{\overline{a}}$=a</td></tr>
<tr><td>Commutativité
a.b=b.a
a+b=b+a</td><td>Associativité
a.(b.c)=(a.b).c
a+(b+c)=(a+b)+c</td><td>Distributivité
a.(b+c)=a.b+a.c
a+(b.c)=(a+b).(c+a)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propriétés complémentaires
a.(a+b)=a a.($\overline{a}$+b)=a.b
a+(a.b)=a a+($\overline{a}$.b)=a+b</td><td>Theoreme de De Morgan
$\overline{a.b.c}$=$\overline{a}$+$\overline{b}$+$\overline{c}$
$\overline{a+b+c}$=$\overline{a}$.$\overline{b}$.$\overline{c}$</td></tr>
</table>

I.9. Définition du théorème de De Morgan.

Complément d'une somme logique

$$\overline{a+b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

$$Y = \overline{X1+X2+X3+...+Xn} = \overline{X1} \cdot \overline{X2} \cdot \ldots \overline{Xn}$$

Complément d'un produit logique

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

$$Y = \overline{X1.X2.X3. \ldots Xn} = \overline{X1} + \overline{X2} + \ldots \overline{Xn}$$

Les lois de De Morgan montrent qu'une fonction ET peut être fabriquée à partir des fonctions OU et NON. De même une fonction OU peut être obtenue à partir des fonctions ET et NON.

II. Les principaux modes de représentation de la logique combinatoire.

II.1. La forme canonique d'une équation logique:

La forme canonique d'une fonction est la forme totalement développée des équations. Elle est issue directement de la table de vérité.

Pour exemple :

$$H_1 = a.\bar{b} + a.b.\bar{c} = a.\bar{b}.(c + \bar{c}) + a.b.\bar{c} = a.\bar{b}.c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.b.\bar{c}$$

Forme simplifié

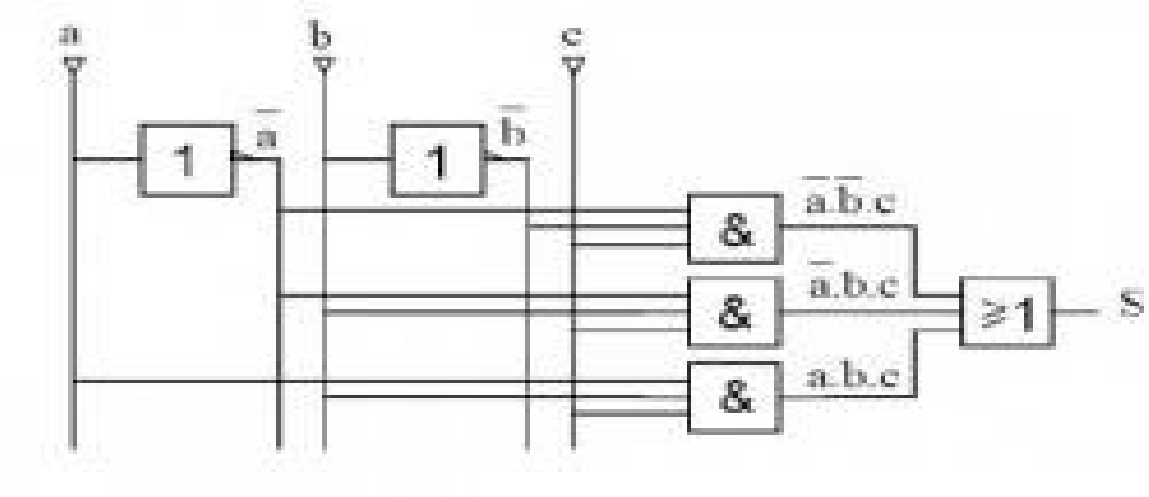
Forme canonique

II.2. Le logigramme d'une équation logique:

Un logigramme est un schéma électrique à base de portes logiques. Pour effectuer un logigramme, il suffit de suivre l 'équation logique en repérant les termes prioritaires : un ET est prioritaire devant un OU.

Remarque : Deux sorties ne peuvent jamais être connectées entre elles.
Exemple :

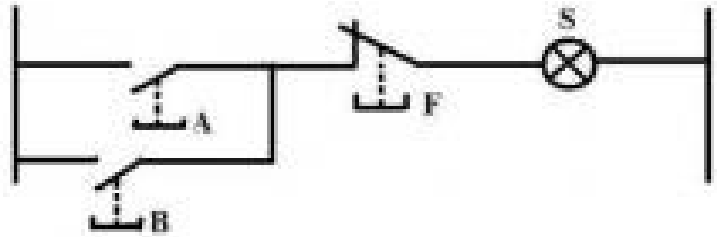
$$S = \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.b.c + a.b.c$$



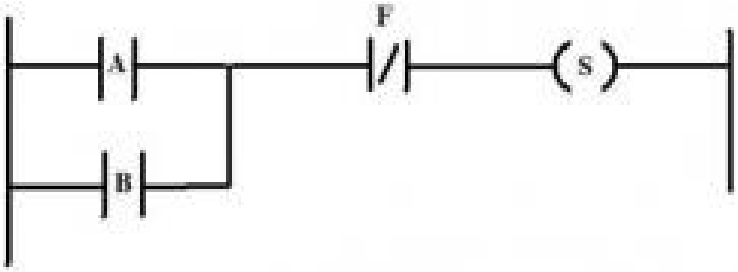
II.3. Le schéma électrique, le graphe à contact (ladder) d'une équation logique:

Une équation logique peut être représentée à l'aide d'un schéma électrique ou d'un graphe à contact (Ladder).

Par exemple, la fonction logique, S= (A+B).F a pour schéma électrique équivalent :

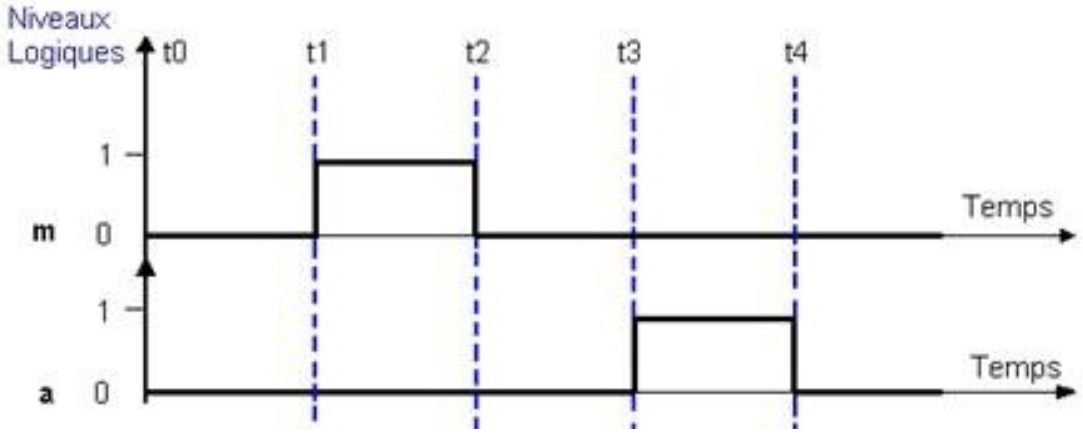


et a pour schéma à contact équivalent :



II.4. Le chronogramme:

Le chronogramme est une représentation graphique de l'évolution temporelle d'un signal électrique ou d'un état.



II.5. La table de vérité:

Une table de vérité représente une fonction logique. Elle donne l'état de la fonction pour toutes les combinaisons des états des variables.

Elle comporte 2n lignes, n représentant le nombre de variables.
Elle permet d'établir l'équation logique de la fonction.

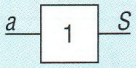
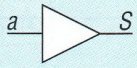
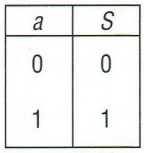
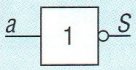
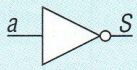
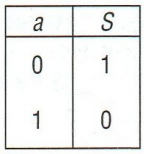
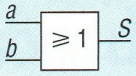
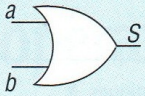
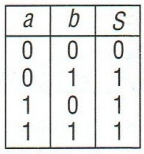
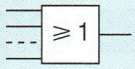
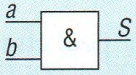
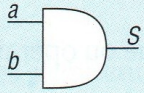
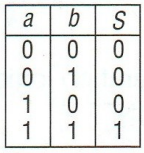
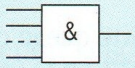
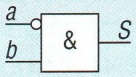
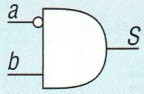
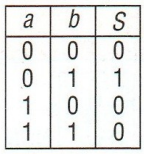
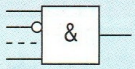
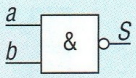
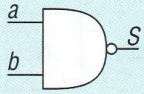
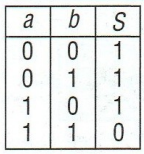
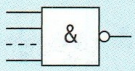
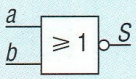
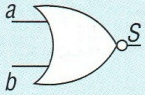
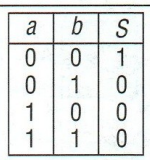
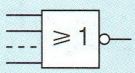
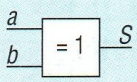
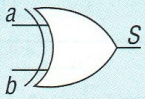
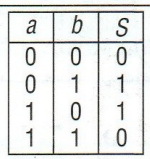
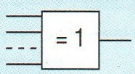
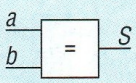
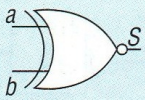
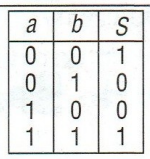
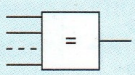
Exemple de table de vérité:

a et b : variables logiques
F : fonction logique

a	b	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

↙ Etat des variables ↘ Etat de la fonction

III. Les fonctions logiques de base

Opérateur ou fonction	Cas de 2 variables *a* et *b*				*n* variables	
	équation logique	symboles usuels AFNOR	symboles usuels ASGS	table de verité	symbole	*s* = 1 *si*
OUI	$S = a$					
NON	$S = \overline{a}$					
OU	$S = a + b$					une entrée à 1, autres à 0 ou 1
ET	$S = a.b$					toutes les entrées à 1
inhibition	$S = \overline{a}.b$					entrées inhibées à 0, autres à 1
NAND (NON ET)	$S = \overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$					1 entrée à 1, 1 entrée à 0, autres à 0 ou 1
NI NOR (NON OU)	$S = \overline{a + b} = \overline{a}.\overline{b}$					toutes les entrées à 0
OU EXCLUSIF (XOR)	$S = a \oplus b$					1 seule entrée à 1, autres à 0
identité logique (XNOR)	$S = \overline{a \oplus b}$					toutes les entrées au même état, 0 ou 1

IV. Les fonctions logiques universelles.

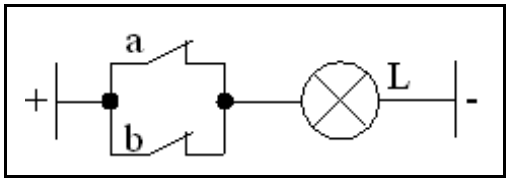
Une fonction est universelle lorsqu'elle permet, à elle seule, d'exprimer les fonctions de base OUI, NON, ET, OU.

IV.1. Fonction NAND

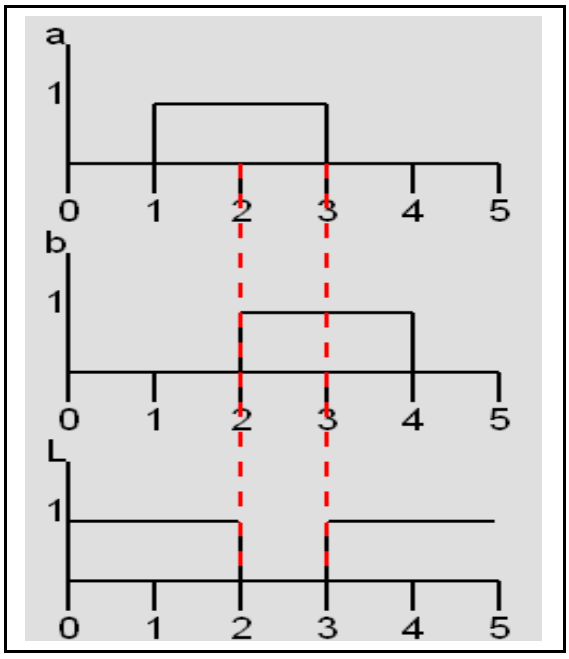
Forme canonique :

$$L = \overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$$

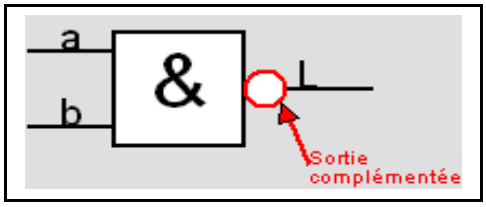
Schéma électrique :

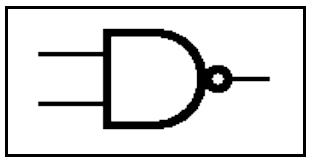


Chronogramme :



Symbole :



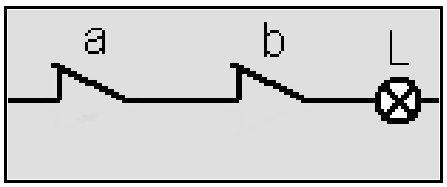


IV.2. Fonction NOR

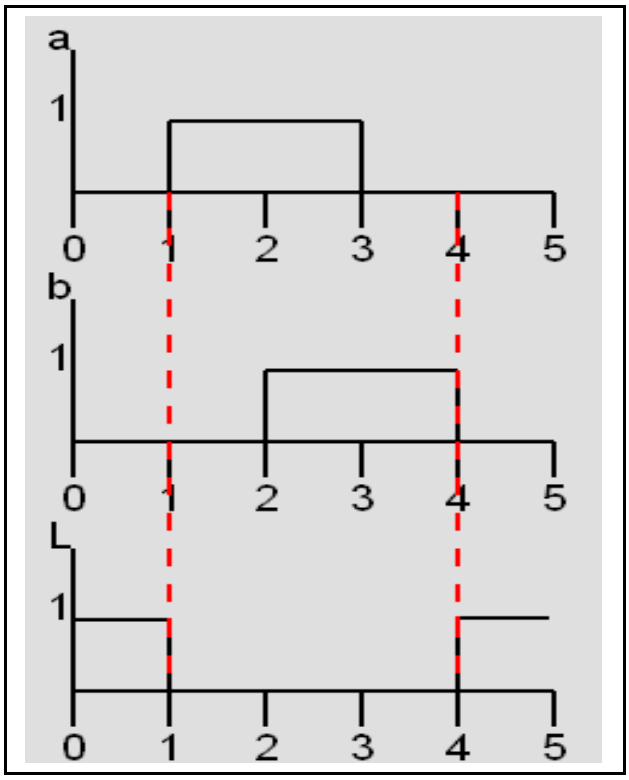
Forme canonique :

$$L = \overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$$

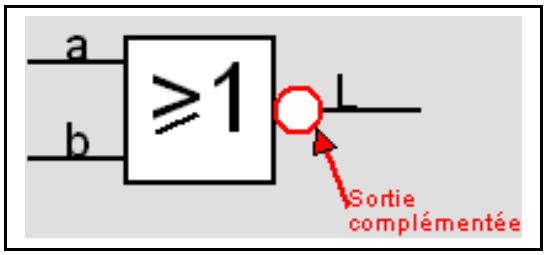
Schéma électrique :

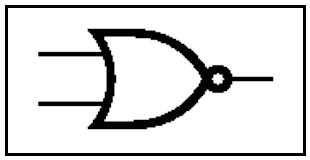


Chronogramme :



Symbole :

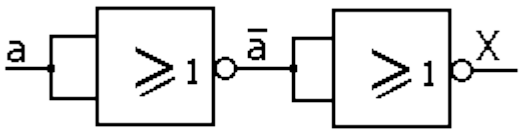




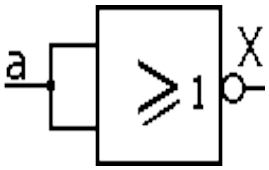
IV.3. Exemples de fonctions de bases obtenues à l'aide de portes universelles:

- **NOR**

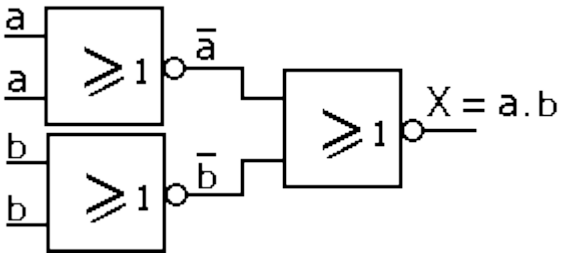
Equivalent OUI :



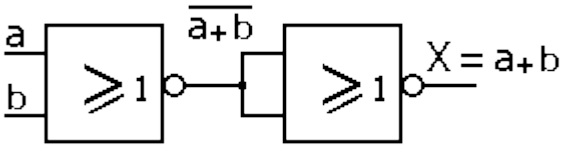
Equivalent NON :



Equivalent ET :

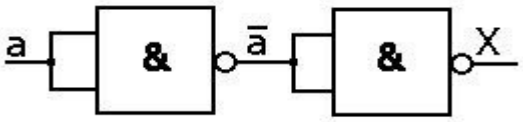


Equivalent OU :

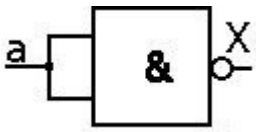


- **NAND**

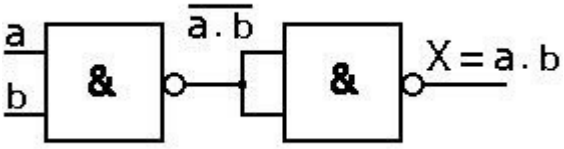
Equivalent OUI :



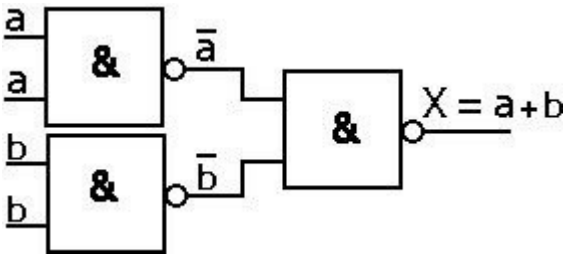
Equivalent NON :



Equivalent ET :



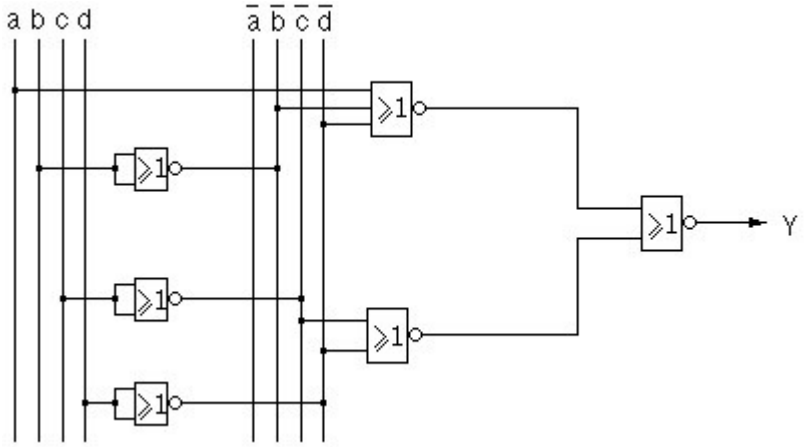
Equivalent OU :



IV.4. Exemples d'une fonction (Y = $\overline{d}$ + (b + a) c) obtenue à partir de portes universelles

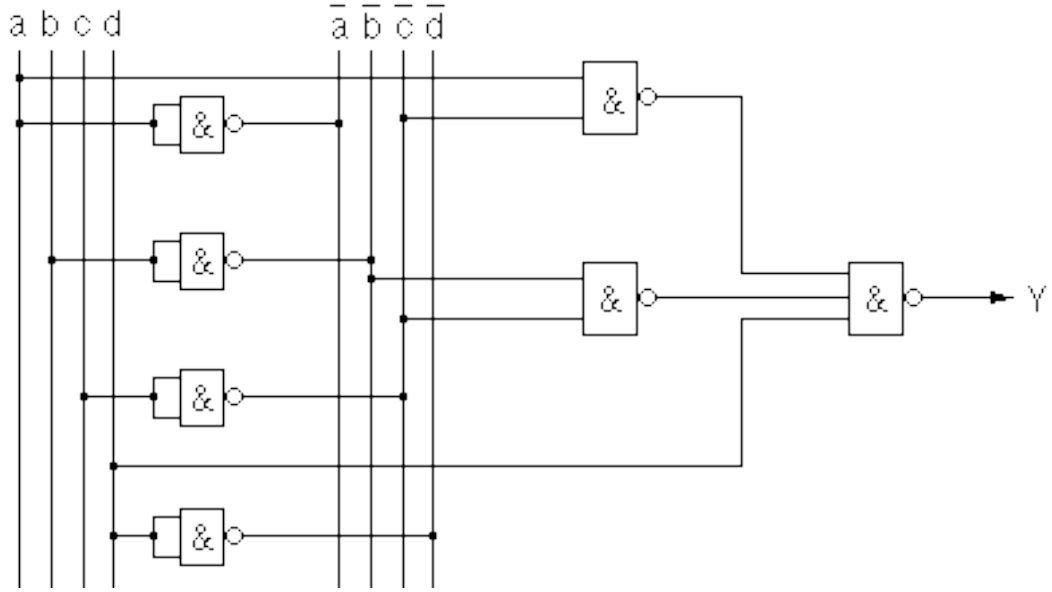
- **NOR**

$$Y = (\overline{d} + \overline{c})(\overline{d} + \overline{b} + a)$$
$$\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{(\overline{d} + \overline{c})(\overline{d} + \overline{b} + a)}}$$
$$Y = \overline{\overline{(\overline{d} + \overline{c})} + \overline{(\overline{d} + \overline{b} + a)}}$$

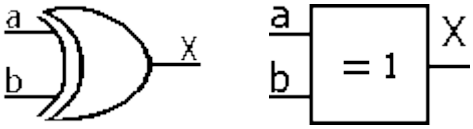
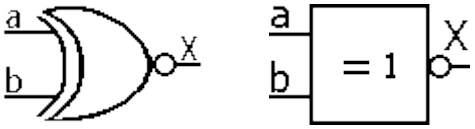


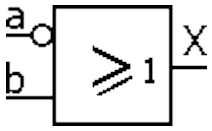
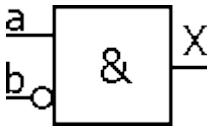
- **NAND**

$$Y = \overline{d} + \overline{c}\,\overline{b} + a\,\overline{c}$$
$$\overline{\overline{Y}} = \overline{(\overline{d} + \overline{c}\,\overline{b} + a\,\overline{c})}$$
$$Y = (d \,.\, \overline{\overline{c}\,\overline{b}} \,.\, \overline{a\,\overline{c}})$$



V. Les fonctions logiques complexes

V.1. XOR	***V.2. XNOR***
$X = a \oplus b$	$X = a \odot b$
Forme canonique : $X = (a \cdot \overline{b}) + (\overline{a} \cdot b)$	Forme canonique : $X = (a \cdot b) + (\overline{a} \cdot \overline{b})$
Symbolisation : 	Symbolisation : 
Commentaire : La fonction X prend une valeur égale à 1 quand l'une OU l'autre des variables, à l'EXCLUSION des 2 à la fois, prennent une valeur égale à 1.	Commentaire : La fonction X prend une valeur égale à 1 quand l'une ET l'autre des variables prennent la même valeur ; il est EXCLU que l'une des variables soit différente d'une l'autre.
Utilisation en électricité : démarrage moteur à 2 sens en électronique : fabrication de front	Utilisation en informatique : comparateur de bit

V.3. Implication	***V.4. Inhibition***
$X = a \Rightarrow b$	$X = a \uparrow b$
Forme canonique : $X = \overline{a} + b$	Forme canonique : $X = a \cdot \overline{b}$
Symbolisation : 	Symbolisation : 
Commentaire : Tant que a = 0 alors X = 1 quelque soit la valeur de b ; on ignore la valeur de b. Si a = 1 alors X prendra une valeur 0 ou 1 en fonction de la valeur de b ; on IMPLIQUE b dans le résultat de la valeur de X.	Commentaire : La fonction X présente une valeur inverse de 1 tant que b vaut 0, pour n'importe quelle valeur de a. Le changement de la variable a est inhibée par la valeur 1 de b (changement de la valeur de X impossible).
Utilisation en informatique : opérateur de déduction pour la programmation logique	Utilisation en électricité : démarrage moteur à arrêt prioritaire.

VI. Les tableaux de Karnaugh

Un tableau de Karnaugh sert à simplifier une équation logique sans passer par les propriétés de l'Algèbre de Boole

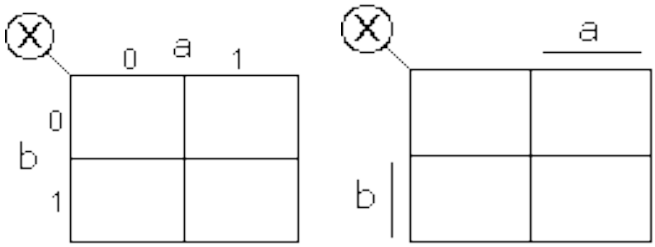
VI.1. Représentation d'un tableau de Karnaugh

Les tableaux de KARNAUGH sont une autre forme de représentation graphique des tables de vérité. La disposition est différente et l'emploi du binaire réfléchi impératif pour un usage correct (code GRAY).

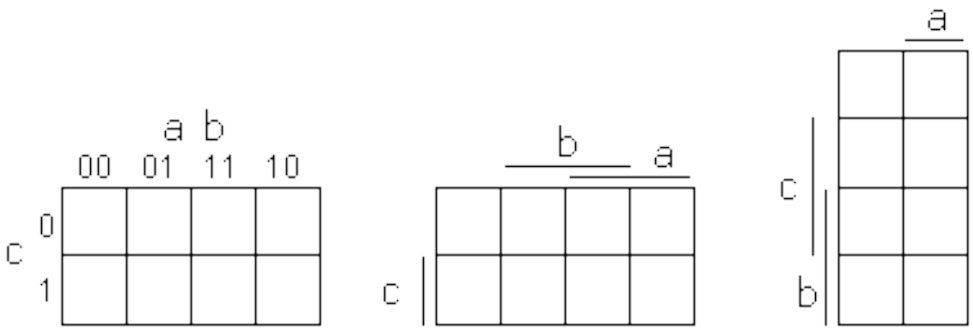
Le tableau de Karnaugh étant une forme condensée de la table de vérité, on retrouve dans chaque case une solution, c'est-à-dire une valeur d'état de la sortie. Il est composé de 2n cases (avec n le nombre de variables d'entrée).

Lorsqu'on se déplace d'une case, une seule variable d'entrée peut changer d'état. Deux cases adjacentes ne voient évoluer qu'une seule variable (code GRAY).

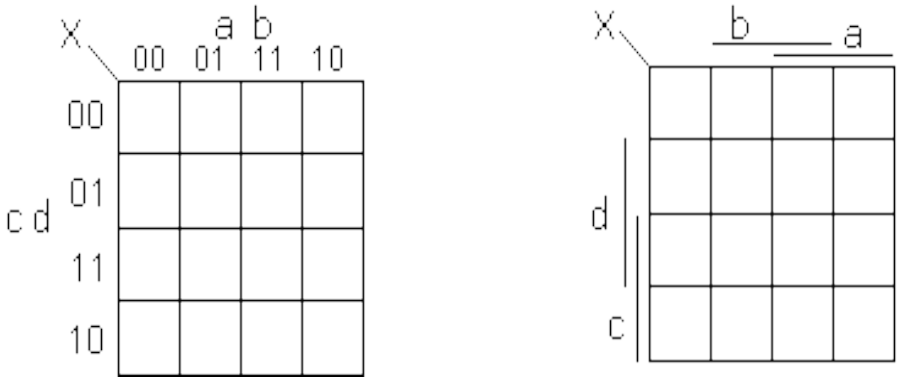
Tableaux à deux variables



Tableaux à trois variables

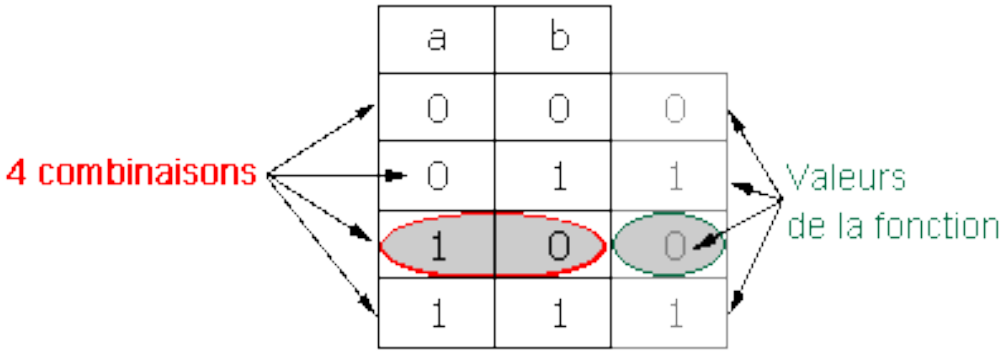


Tableaux à quatres variables

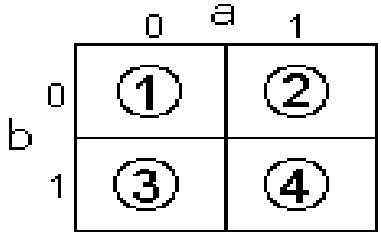


VI.2. Mode d'emploi d'un tableau de Karnaugh

A partir de la table de vérité d'une fonction logique quelconque :



On remplit le tableau de Karnaugh suivant :



Avec :

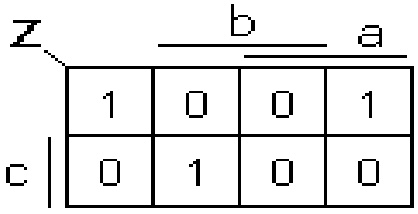
- La case 1 correspondant à la combinaison a = 0 b = 0 ==> ① = 0
- La case 2 correspond à la combinaison a = 1 b = 0 ==> ② = 0
- La case 3 correspond à la combinaison a = 0 b = 1 ==> ③ = 1
- La case 4 correspond à la combinaison a = 1 b = 1 ==> ④ = 1

Exemple de remplissage d'un tableau de Karnaugh

Table de vérité :

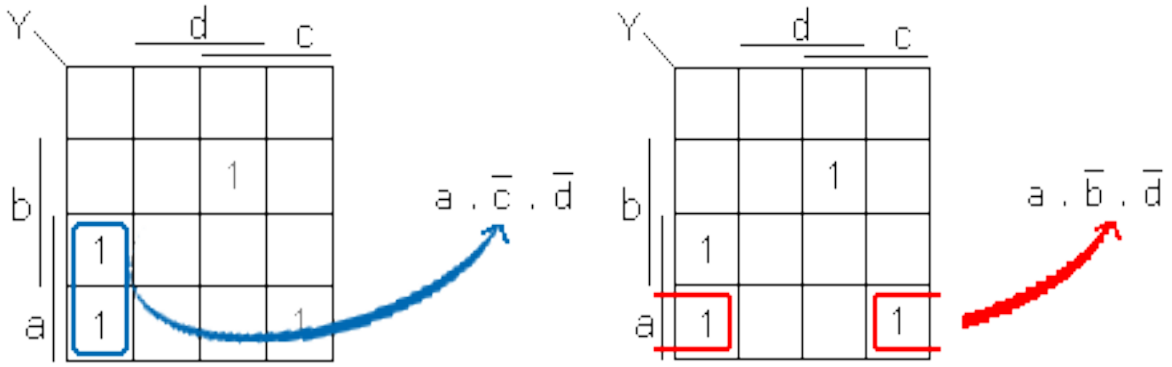
a	b	c	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Tableau de Karnaugh



VI.3. Simplification à l'aide d'un tableau de Karnaugh

Une fois le tableau de Karnaugh obtenu, la simplification de la fonction logique correspondante s'obtient en regroupant les 1 ou les 0 du tableau. Les regroupements sont possibles uniquement avec des cases adjacentes identiques et par groupe de 2^n (n devant être le plus grand possible) comme le montre la figure ci-dessous:



L'équation logique de chaque regroupement correspond au produit logique des variables dont il dépend.

Le regroupement bleu est indépendant de b, Y = 1 pour b égale 0 ou 1.

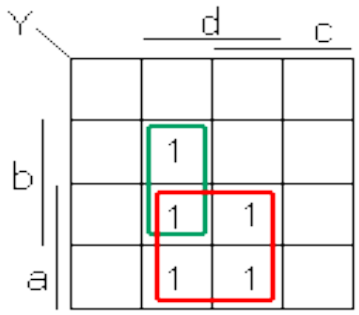
Le regroupement rouge est indépendant de c, Y=1 pour c égale 0 ou 1.

Le regroupement noir dépend des quatre variables d'entrée.

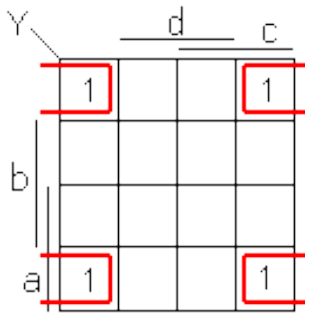
L'équation globale de la fonction logique à simplifier correspond à la somme logique des équations de chaque regroupement.

La fonction logique correspondante devient : **Y = a.c̄.d̄ + a.b̄.d̄ + ā.b.c.d**

Exemples de regroupement



Y = b.d.c̄ + a.d

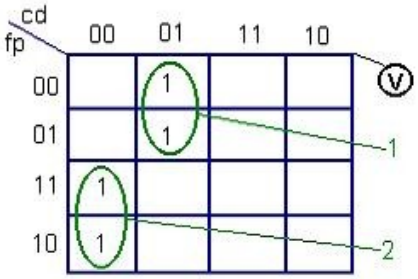


Y = b̄.d̄

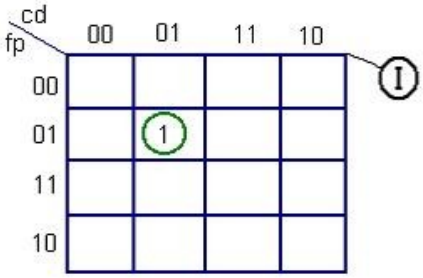
VI.4. Exemples d'utilisation des tableaux de Karnaugh

Établissons les tableaux de Karnaugh que nous tirerons de la table de vérité et ce, pour chaque variable de sortie V, M, I, P.

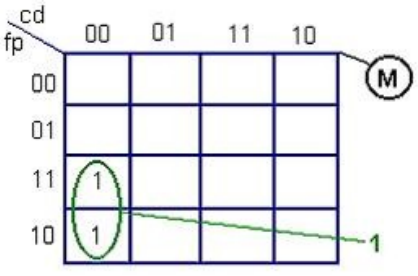
	c	d	f	p	V	M	I	P
①	0	0	0	0	0	0	0	0
②	0	0	0	1	0	0	0	0
③	0	0	1	0	1	1	0	0
④	0	0	1	1	1	1	0	1
⑤	0	1	0	0	1	0	0	0
⑥	0	1	0	1	1	0	1	0
⑦	0	1	1	0	0	0	0	0
⑧	0	1	1	1	0	0	0	0
⑨	1	0	0	0	0	0	0	0
⑩	1	0	0	1	0	0	0	1
⑪	1	0	1	0	0	0	0	0
⑫	1	0	1	1	0	0	0	0
⑬	1	1	0	0	0	0	0	0
⑭	1	1	0	1	0	0	0	0
⑮	1	1	1	0	0	0	0	0
⑯	1	1	1	1	0	0	0	0



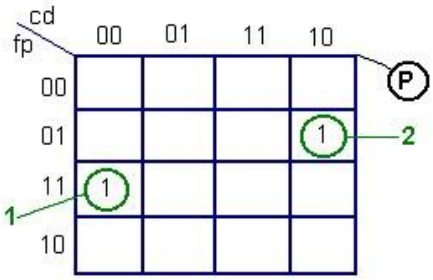
$V = f.\bar{c}.\bar{d} + \bar{f}.\bar{c}.d$



$I = p.\bar{f}.\bar{c}.d$



$M = f.\bar{c}.\bar{d}$



$P = f.p.\bar{c}.\bar{d} + \bar{f}.p.\bar{d}.c$